Homogene linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Homogena linearna jednačina sa konstantnim koeficijentima je oblika

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad \dots (1)$$

gdje su $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_n$ konstante.
Ova jednačina se uvijek može napisati u oblika

$$a_0 \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_3\right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1}\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_n\right) y = 0$$

ako uvedemo oznake za $\frac{d}{dx}$ pišući $\frac{d}{dx} = \lambda$ ovo postaje

$$a_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) y = 0.$$

Jednačina

$$a_0 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0 \qquad \dots (2)$$

se naziva <u>karakteristična jednačina</u> dif. jednač. (1), a korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ se nazivaju <u>karakteristični korijeni</u>.

Da bi odredili opšte rješenje diferencijalne jednačine (1) prvo je potrebno odrediti karakterističnu jednačinu oblika (2).

a) Neka je $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \ldots \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$ (n različitih rješenja). Tada je

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

opće rješenje.

Npr. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ je opće rješenje

b) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \ldots \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$. Tada je

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

opće rješenje.

U općem slučaju, ako se korijen λ pojavi m puta u općem rješenju mu odgovara faktor

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 x^2 e^{\lambda x} + \ldots + C_m x^{m-1} e^{\lambda x}$$

Npr. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$

$(\lambda - 2)^2 (\lambda + 2) = 0$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ je opće rješenje

c) Ako su koeficijenti jednačine (1) realni i ako je $\alpha + i\beta$ kompleksan korijen jednačine (2) tada je korijen i $\alpha - i\beta$. Odgovarajući član u općem rješenju je

$$A e^{(\alpha + i\beta)} + B e^{(\alpha - i\beta)} = e^{\alpha x}(A e^{i\beta x} + B e^{-i\beta x})$$

$$= e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

gdje su A, B, C_1, C_2 proizvoljne konstante.

Npr. $y'' - 4y' + 5y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i$

$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ je opće rješenje

(#) Pokazati da vrijedi jednakost

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)y=\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)\left(\frac{d}{dx}-a\right)y$$

Rj.

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)y= \qquad y'=\frac{dy}{dx}$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)(y'-cy)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-a\right)(y''-cy'-by'+bcy)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-a\right)(y''-(b+c)y'+bcy)$$

$$=y'''-(b+c)y''+bcy'-ay''+a(b+c)y'-abcy$$

$$=y'''-(a+b+c)y''+(ab+ac+bc)y'-abcy \qquad \ldots(1)$$

$$\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)\left(\frac{d}{dx}-a\right)y=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-b\right)\left(\frac{d}{dx}-c\right)(y'-ay)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-b\right)(y''-ay'-cy'+acy)$$

$$=\left(\frac{d}{dx}-b\right)(y''-(a+c)y'+acy)$$

$$=y'''-(a+c)y''+acy'-by''+b(a+c)y'-abcy$$

$$=y'''-(a+b+c)y''+(ab+ac+bc)y'-abcy \qquad \ldots(1)$$

Kako je (1)=(2) to vrijedi dana jednakost.

(#) Proveriti da li $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} + C_3 e^{cx}$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)\left(\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d}{dx} - c\right) y = 0$$

Rj. Želimo pokazati da je

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)\left(\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d}{dx} - c\right)\left(C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} + C_3 e^{cx}\right) = 0$$

Izračunajmo $\left(\frac{d}{dx} - a\right)\left(\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d}{dx} - c\right) C_1 e^{ax}$.

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)\left(\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d}{dx} - c\right) C_1 e^{ax} =$$

$$= \left(\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d}{dx} - c\right)\left(\frac{d}{dx} - a\right) C_1 e^{ax} =$$

$$= C_1 \left(\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d}{dx} - c\right) \underbrace{\left(a \cdot e^{ax} - a e^{ax}\right)}_{=0} = 0$$

Slično bi pokazali za druga dva člana.

Primjetimo da diferencijalnu jednačinu

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)\left(\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d}{dx} - c\right) y = 0$$

možemo napisati u obliku

$$y''' - (a+b+c)y'' + (ab+ac+bc)y' - abcy = 0$$

(#) Provjeriti da li $y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} + c_3 x^2 e^{mx}$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 y = 0$.

Rj: $\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 c_1 e^{mx} = \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \left(\frac{d}{dx} - m\right) c_1 e^{mx} =$

$= c_1 \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \underbrace{\left(m e^{mx} - m e^{mx}\right)}_{=0} = 0 \quad \ldots (1)$

$\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 c_2 x e^{mx} = c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \left(\frac{d}{dx} - m\right) x e^{mx} =$

$= c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 \left(e^{mx} + \underbrace{mx e^{mx}} - \underbrace{mx e^{mx}}\right) =$

$= c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)\left(\frac{d}{dx} - m\right) e^{mx} = c_2 \left(\frac{d}{dx} - m\right)\left(m e^{mx} - m e^{mx}\right) = 0 \quad \ldots (2)$

$\left(\frac{d}{dx} - m\right)^3 c_3 x^2 e^{mx} = \overset{\text{24 VJEŽBU}}{\ldots} = 2\left(\frac{d}{dx} - m\right)^2 c_3 x e^{mx} = \ldots =$

$= 2\left(\frac{d}{dx} - m\right) 0 = 0 \quad \ldots (3)$

Iz (1), (2) i (3) slijedi da data f-ja y zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu.

(#) Odrediti opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\left(\frac{d}{dx}-m\right)^2 . y = 0$$

(a) pretpostavljajući da je rješenje oblika $y = x^r e^{mx}$;

(b) rješavajući ekvivalentan par jednadžbi

$$\left(\frac{d}{dx}-m\right) y = v, \quad \left(\frac{d}{dx}-m\right) v = 0.$$

Rj.:

(a) $$\left(\frac{d}{dx}-m\right)^2 y = \left(\frac{d}{dx}-m\right)\left(\frac{d}{dx}-m\right) x^r e^{mx} =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}-m\right)\left(r x^{r-1} e^{mx} + m x^r e^{mx} - m x^r e^{mx}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}-m\right) r x^{r-1} e^{mx} = r(r-1) x^{r-2} e^{mx} +$$

$$+ mr x^{r-1} e^{mx} - mr x^{r-1} e^{mx} =$$

$$= r(r-1) x^{r-2} e^{mx}$$

Zadnji izraz je jednak nuli kada je $r = 0, 1$.

Prema tome jednadžba ima dva linearno nezavisna rješenja $y = e^{mx}$ i $y = x e^{mx}$.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je $y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$.

(b) Ako napišemo da je $\left(\frac{d}{dx}-m\right) y = v$ tada

$$\left(\frac{d}{dx}-m\right)^2 y = \left(\frac{d}{dx}-m\right)\left(\frac{d}{dx}-m\right) y = (0-m) v = 0.$$

Rješimo jednačinu $\left(\frac{d}{dx} - m\right) v = 0$

$$\frac{dv}{dx} - mv = 0$$

$$dv = mv\,dx$$

$$\frac{dv}{v} = m\,dx \Rightarrow \quad v = C_1 e^{mx}$$

Sad rješimo jednačinu

$$\left(\frac{d}{dx} - m\right) y = C_1 e^{mx}$$

$$y' - my = C_1 e^{mx}$$ ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - muv = C_1 e^{mx}$

$u'v + u\underbrace{(v' - mv)}_{=0} = C_1 e^{mx}$

a) $v' - mv = 0$

$\frac{dv}{dx} = mv$

$v = C_2 e^{mx}$

b) $u'v = C_1 e^{mx}$

$u' C_2 e^{mx} = C_1 e^{mx}$

$u' = C_3$

$u = C_3 x$

$y = C_4 x e^{mx}$

Time smo dobili da je opće rješenje diferencijalne jedn.

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Rj. homogena
Ovo je linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. (koeficijenti su 1, 1, -2).

Primjetimo da datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2\right) y = 0 \qquad \dots (1)$$

Sad vidimo da je odgovarajuća karakteristična jednačina $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

tj. (1) možemo napisati u obliku

$$\left(\frac{d}{dx} + 2\right)\left(\frac{d}{dx} - 1\right) y = 0$$

Korijeni karakteristične jednačine su $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$

1° $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ je opće rješenje

2° $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$ je opće rješenje

3° $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ opće rješenje

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$ je traženo opće rješenje dif. jedn.

(#) Riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

R.j. Data je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Formirajmo karakterističnu jednadžbu

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

$$4\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$4\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

1° $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ je opće rj.

2° $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$ je opće rj

3° $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i$ $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ je opć. rj.

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}$$

je opće rješenje dane diferenc. jedn.

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Rj:

Primjetimo da je data diferencijalna jednačina homogena lin. dif. jedn. sa konstantnim koeficijentima.

Formirajmo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$; $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ je opšte rješenje

$y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ je opšte rješenje date dif. jedn.

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''' - 8y = 0$.

R.j. Data diferencijalna jednačina je homogena linearna dif. jedn. sa konstantnim koeficijentima.

Formirajmo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

$$\lambda^3 - 2^3 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\,i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\,i$$

Ako se u rješenje karakteristične jednačine kovijen λ pojavljuje r puta njemu odgovara opšte rješenje

$$C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 x^2 e^{\lambda x} + \ldots + C_r x^{r-1} e^{\lambda x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x)$$

opšte rješenje

Ako je $a+ib$ kompleksno rješenje karakteristične jednačine tada je i $a-ib$ također rješenje. Odgovarajući član u opštem rješenju je $Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} = \ldots = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ gdje su A, B, C_1, C_2 proizvoljne konstante

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Rj.

Data je homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 \qquad \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

$$\lambda = \pm i$$

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

$$(\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = i \qquad \lambda_{3,4} = -i$$

Ako je $a \pm bi$ kompleksan korijen karakteristične jednačine odgovarajući član u općem rješenju je $e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.
Ako se kompleksan korijen $a \pm bi$ pojavljuje m puta tada se u općem rješenju pojavljuje

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) + x e^{ax}(C_3 \cos bx + C_4 \sin bx) + \ldots + x^{m-1} e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx)$$

$$y = (C_1 + C_3 x) e^{0x} \cos x + (C_2 + C_4 x) e^{0x} \sin x$$

opće rješenje

(#) Riješiti diferencijalne jednačine

a) $y'' + y' - 6y = 0$

b) $y''' - y'' - 12y' = 0$

c) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$

Rj. Sve tri date jednačine su homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

U sve tri slučaja prvo ćemo formirati karakterističnu jedn.

a)
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

Karakteristični korjeni su 2 i -3 i opšte rješenje je
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

b)
$$\lambda^3 - \lambda^2 - 12\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 3) = 0$$

Karakteristični korjeni su 0, 4 i -3 i opšte rješenje je
$$y = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-3x}$$

c)
$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$$

Karakteristični korjeni su $-3, -1$ i 2 i opšte rješenje je
$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

(#) Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(b) $y^{IV} + 6y''' + 5y'' - 24y' - 36y = 0$

(c) $y^{IV} - y''' - 8y'' - 11y' - 4y = 0$

Rj. Sve tri date jednačine su homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

U sve tri slučaja prvo ćemo formirati karakterističnu jednačinu.

(a) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$(\lambda - 1)^3 = 0$

Karakteristični korjeni su 1, 1, 1 i opšte rješenje je

$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$

(b) $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 - 24\lambda - 36 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 3)^2 = 0$

Karakteristični korjeni su $2, -2, -3, -3$. Opšte rješenje je

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x} + C_4 x e^{-3x}$

(c) $\lambda^4 - \lambda^3 + 8\lambda^2 - 11\lambda - 4 = 0$

$(\lambda + 1)^3(\lambda - 4) = 0$

Karakteristični korjeni su $-1, -1, -1, 4$

Opšte rješenje je

$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + C_4 e^{4x}$

(#) Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y'' - 2y' + 10y = 0$ (b) $y''' + 4y' = 0$

(c) $y^{IV} + y''' + 2y'' - y' + 3y = 0$ (d) $y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$

(e) $(y'' - 2y' + 5y)^2 = 0$

Rj. Sve jednačine su homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

(a) $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ su karakteristični korijeni

Opšte rješenje je $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

(b)

$\lambda^3 + 4\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 4) = 0$

$\lambda(\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0$

Karakteristični korijeni su $0, \pm 2i$.

Opšte rješenje je

$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

(c) $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$

$(\lambda^2 + 2\lambda + 3)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$

Karakteristični korijeni su $-1 \pm i\sqrt{2}$, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

Opšte rješenje je $y = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x) + e^{-\frac{1}{2}x}(C_3 \cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

(d) $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 = 0$

$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 9) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + 3i)(\lambda - 3i) = 0$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$

opšte rješenje

(e) $(\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 + 2i$ $\lambda_{3,4} = 1 - 2i$

$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + xe^x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$

opšte rješenje

Zadaci za vježbu

1. Riješiti diferencijalne jednadžbe

(a) $y'' + 2y' - 15y = 0$

(b) $y''' + y'' - 2y' = 0$

(c) $y'' + 6y' + 9y = 0$

(d) $y^{IV} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$

(e) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(f) $y'' + 25y = 0$

(g) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$

(h) $y^{IV} + 4y'' = 0$

(i) $y^{IV} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$

(j) $y^{VI} + 9y^{IV} + 24y'' + 16y = 0$

Rješenja:

(a) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}$

(b) $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-2x}$

(c) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

(d) $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x^2 e^{2x}$

(e) $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

(f) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$

(g) $y = C_1 e^{x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$

(h) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$

(i) $y = (C_1 + C_2 x) e^{x} + (C_3 + C_4 x) e^{2x}$

(j) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x)\cos 2x + (C_5 + C_6 x)\sin 2x$

Linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Opšte rješenje dif. jedn.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \quad \ldots (1)$$

(#) Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y'' - 2y' = e^x \sin x$ ZADATAK 1

(b) $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$.

Rj. Obe date jednačine su linearne diferencijalne jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

(a) $y'' - 2y' = 0$

$y'' - 2y' = \underbrace{e^x \sin x}_{=Q(x)}$

kar. jedn. $\lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow Y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$

Partikularno rješenje demo odrediti metodom neodred. koefic.

$Y_p = Ae^x \sin x + Be^x \cos x$

$e^x \sin x$ je izraz iz $Q(x)$ i on se ne nalazi u Y_h

$Y_p' = \ldots = (A-B)e^x \sin x + (A+B)e^x \cos x$

$Y_p'' = \ldots = -2Be^x \sin x + 2Ae^x \cos x$

$Y_p'' - 2Y_p = \ldots = -2Ae^x \sin x - 2Be^x \cos x$

$y'' - 2y = e^x \sin x$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -2A = 1$

$\underline{-2B = 0} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \quad B = 0$

$Y_p = -\frac{1}{2} e^x \sin x$

$Y = Y_h + Y_p$

$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2} e^x \sin x$

opće rješ.

b) $y'' - 2y' + 3y = 0 \Rightarrow$ kar. jedn. $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$D = 4 - 12 = -8 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$

$$Y_h = e^x (C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)$$

Izrazi x^3 i $\sin x$ iz $Q(x)$ se ne nalaze u Y_h pa je

$$Y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + E + F\sin x + G\cos x$$

$$Y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C - G\sin x + F\cos x$$

$$Y_p'' = 6Ax + 2B - F\sin x - G\cos x$$

$$Y_p'' - 2Y_p' + 3Y_p = 3Ax^3 + 3(B-2A)x^2 + (3C - 4B + 6A)x + (3E - 2C + 2B) + 2(F+G)\sin x + 2(G-F)\cos x \Rightarrow$$

$$y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$$

$\Rightarrow$

$3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$3(B-2A) = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$

$3C - 4B + 6A = 0 \Rightarrow C = \frac{2}{9}$

$3E - 2C + 2B = 0 \Rightarrow E = -\frac{8}{27}$

$2(F+G) = 1$

$2(G-F) = 0 \Rightarrow F = G = \frac{1}{4}$

$$Y_p = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{8}{27} + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$$

$Y = Y_h + Y_p$

$$Y = e^x(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x) + \frac{1}{27}(9x^3 + 18x^2 + 6x - 8) + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$$

opće rješenje dif. jedn.

(#) Riješiti diferencijalne jednadžbe

DRUGI ZADATAK

(a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x + x^2$

(b) $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} + x e^{2x}$

Rj.

Obe dane jedn. su linear. dif. jedn. drugog reda sa konst. koefic.

a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda = 1: \; 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

$(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$\lambda^3 - \lambda^2$

$3\lambda^2 - \lambda - 2$

$3\lambda^2 - 3\lambda$

$2\lambda - 2$

$2\lambda - 2$

$= \; =$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata

$y''' + 2y'' - y' - 2y = \underbrace{e^x + x^2}_{=Q(x)}$

Izraz e^x iz $Q(x)$ se nalazi i u y_h i njemu odgovara korijen $\lambda = 1$ višestrukosti 1 pa razmatramo (diferenciramo) $x e^x$ (naravno, kao i x^2).

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Exe^x + Fe^x$$

$y_p' = 2Ax + B + Exe^x + (E+F)e^x$

$y_p'' = 2A + Exe^x + (2E+F)e^x$

$y_p''' = \quad Exe^x + (3E+F)e^x$

$$\left.\begin{array}{l} y_p''' + 2y_p'' - y_p' - 2y_p = -2Ax^2 - 2(B+A)x + (4A - B - 2C) + 6Ee^x \\ y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} -2A &= 1 \\ -2A-2B &= 0 \\ 4A-B-2C &= 0 \\ 6E &= 1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2},\ C=-\frac{5}{4}$$

$E=\frac{1}{6}$, F je proizvoljno

Sad F je proizvoljno, ali kako je $C_1 e^x$ već dio iz Y_h, Fe^x uopće nije potrebno.

$$Y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{1}{6}xe^x$$

$Y = Y_h + Y_p$

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{1}{6}xe^x$$

opće rješenje

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

odgov. karakt. jedn. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

$$y'' - 4y' + 4y = \underbrace{x^3 e^{2x} + x e^{2x}}_{Q(x)}$$

U izrazu $x^3 e^{2x}$ iz $Q(x)$ primjetimo da se e^{2x} također pojavljuje u Y_h kojem odgovara korijen $\lambda = 2$ višestrukosti dva, pa diferenciramo f_3 u

$$x^{3+2} e^{2x}$$

(ovdje imamo slučaj (b) iz teksta koji se nalazi iza naslova Metoda neodređenih koeficijenata)

$$Y_p = Ax^5 e^{2x} + Bx^4 e^{2x} + Cx^2 e^{2x} + Ex^2 e^{2x}$$

Primjetimo da izrazi xe^{2x} i e^{2x} nisu uključeni, zato što se pojavljuju u Y_h. Sad imamo

$$Y_p' = \ldots = 2Ax^5e^{2x} + (5A+2B)x^4e^{2x} + (4B+2C)x^3e^{2x} +$$
$$+ (3C+2E)x^2e^{2x} + 2Exe^{2x}$$

$$Y_p'' = \ldots = 4Ax^5e^{2x} + (20A+4B)x^4e^{2x} + (20A+16B+4C)x^3e^{2x} +$$
$$+ (12B+12C+4E)x^2e^{2x} + (6C+8E)xe^{2x} + 2Ee^{2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_p'' - 4Y_p' + 4Y_p = \ldots = 20Ax^3e^{2x} + 12Bx^2e^{2x} + 6Cxe^{2x} + 2Ee^{2x} \\ Y'' - 4Y' + 4Y = x^3e^{2x} + xe^{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{20}, \; B = 0, \; C = \frac{1}{6}, \; E = 0$$

$$Y_p = \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

$$Y = Y_h + Y_p$$

$$Y = C_1e^{2x} + C_2xe^x + \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$$

opće rješenje

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$.

Rj. $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$ je linearna dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima TREĆI ZADATAK

odgovar. homog je $y'' + 4y = 0$

kar. jedn. $\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata.

Izraz $x^2 \sin 2x$ iz $Q(x)$ je oblika $x^2 \cdot u$, dok se (izraz) $u = \sin 2x$ pojavljuje u y_h i njemu odgovara korijen $\lambda = \pm 2i$ višestrukosti 1.

Diferenciramo $x^3 \sin 2x$

$$y_p = Ax^3 \cos 2x + Bx^3 \sin 2x + Cx^2 \cos 2x + Ex^2 \sin 2x + Fx \cos 2x + Gx \sin 2x$$

Primjetimo da izraz $H\cos 2x + K \sin 2x$ nismo uključili, zato što se ovi izrazi nalaze u y_h.

$$y_p' = \ldots = 2Bx^3 \cos 2x - 2Ax^3 \sin 2x + (3A + 2E)x^2 \cos 2x + (3B - 2C)x^2 \sin 2x + (2C + 2G)x \cos 2x + (2E - 2F)x \sin 2x + F \cos 2x + G \sin 2x$$

$$y_p'' = \ldots = -4Ax^3 \cos 2x - 4Bx^3 \sin 2x + (12B - 4C)x^2 \cos 2x + (-12A - 4E)x^2 \sin 2x + (6A + 8E - 4F)x \cos 2x + (6B - 8C - 4G)x \sin 2x + (2C + 4G)\cos 2x + (2E - 4F)\sin 2x$$

Sad

$$y_p'' + 4y_p = \underline{\underline{12Bx^2\cos 2x}} \underline{-12Ax^2\sin 2x} + (6A+8E)x\cos 2x + (6B-8C)x\sin 2x + (2C+4G)\cos 2x + (2E-4F)\sin 2x \Rightarrow$$

$$y'' + 4y = x^2 \sin 2x$$

$$\Rightarrow \quad -12A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{12}$$

$$12B = 0 \qquad B = 0, \quad C = 0, \quad E = \frac{1}{16}$$

$$6A + 8E = 0 \qquad F = \frac{1}{32}, \quad G = 0$$

$$6B - 8C = 0$$

$$2C + 4G = 0$$

$$2E - 4F = 0$$

$$y_p = -\frac{1}{12}x^3\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x + \frac{1}{32}x\cos x$$

partikularno rješenje

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{12}x^3\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x + \frac{1}{32}x\cos 2x$$

opće rješenje

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Rj.

Data je nehomogena (linearna) diferencijalna jednačina drugog reda (sa konst. koeficijentima). Opšte rješenje je oblika $y = y_p + y_h$ gdje je

y_h – opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine

y_p – neko partikularno rješenje nehomogene jednačine

karakt. jedn. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

Partikularno rješenje ćemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata.

Izraz e^{4x} se ne nalazi u općem rješenju (odgovarajuće) hom. lin. jednačine.

$$y_p = ae^{4x} \Rightarrow y_p' = 4ae^{4x}$$

$$y_p'' = 16ae^{4x}$$

Uvrstimo y_p, y_p' i y_p'' u $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

$$16ae^{4x} - 8ae^{4x} - 3ae^{4x} = e^{4x} \quad / : e^{4x}$$

$$5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \Rightarrow y_p = \frac{1}{5}e^{4x}$$

$$y = \frac{1}{5}e^{4x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$ je opće rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''+y'-2y=3xe^x$.

Rj. Data jednačina je nehomogena lin. dif. jedn. drugog reda sa konst. koef.

Njeno opšte rješenje je oblika $y=y_p+y_h$

karakt. jedn. $\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$

$$y_h=c_1e^x+c_2e^{-2x}$$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficij.

Neka je $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=Q(x)$ nehomog lin. dif. jedn.
Pretpostavimo da se izraz x^m u pojavljuje u $Q(x)$ i neka je u član opšteg rješenja odgovarajuće homogene jednačine. Ako u odgovara korijenu λ višestrukosti s tada y_p mora sadržavati izraz x^{m+s} u plus izraze koji će se pojaviti njegovim diferenciranjem.

xe^x se pojavljuje na desnoj strani diferencijalne jedn. } $\Rightarrow$
e^x se pojavljuje u opštem rješenju odgov. homogen jedn. }

$m=1$
$s=1$

$\Rightarrow y_p=ax^2e^x+bxe^x+ce^x$

$y_p'=\dots=(ax^2+(2a+b)x+c+b)e^x$

$y_p''=\dots=(ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)e^x$

Ako uvrstimo y_p, y_p' i y_p'' u $y''+y'-2y=3xe^x$ imamo ...

$(2a+3b+(6a-3)x)e^x=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{3},\ c$ proizvoljno

$y=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+c)e^x+C_1e^x+C_2e^{-2x}$ opšte rješenje

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y''+y=x\sin x$.

Rj.

$y''+y=x\sin x$ je nehomogena lin. dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Njeno opšte rješenje je oblika $y=y_p+y_h$.

$y''+y=0$

karakt. jedn. $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i \Rightarrow y_h=e^{0x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$y_h=C_1\cos x+C_2\sin x$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata.

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=Q(x)$ – nehom. lin. dif. jedn. n-tog reda sa kon. koef.

$y_p=Ar_1(x)+Br_2(x)+Cr_3(x)+\dots+Gr_t(x)$

gdje su f-je $r_1(x),\dots,r_t(x)$ izrazi iz $Q(x)$ kao i oni koje dobijemo diferenciranjem tih izraza, a $A, B, C, \dots, G$ su konstante

npr. $Q(x)=\sin ax \Rightarrow y_p=A\sin ax+B\cos ax$

Ako se

x^m u pojavljuje u $Q(x)$

u se pojavljuje u y_h (višestrukosti s) $\Rightarrow$ y_p mora sadržati izraz $x^{m+s}u$ plus izraze koje ćemo dobiti diferenc.

$x\sin x$ se pojav. na desnoj str. dif. jedn.

$\sin x$ se pojavljuje u y_h $\Rightarrow$ razmatramo $x^2\sin x$

$\Rightarrow$ kako je $(x^2\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$

$\Rightarrow$

$(2x\sin x+x\cos x)''=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$

$$Y_p = (ax^2+bx+c)\cos x + (dx^2+ex+f)\sin x$$

$$Y_p' = \ldots = (dx^2+(2a+e)x+b+f)\cos x + (ax^2+(b+2d)x+c+e)$$

$$Y_p'' = \ldots = (-ax^2+(-b+4d)x+2a-c+2e)\cos x$$
$$-(dx^2+(4a+e)x+2b-2d+f)\sin x$$

Ako uvrstimo Y_p, Y_p' i Y_p'' u dif. jedn. $y''+y = x\sin x$ imamo

$$(4dx+2a+2e)\cos x + (-4ax-2b+2d)\sin x =$$
$$= x\sin x$$

$\cos x$ i $\sin x$ su linearno nezavisni, pa imamo:

uz $\cos x$: $\quad 4dx+2a+2e = 0$

uz $\sin x$: $\quad -4ax-2b+2d = x$

$$\Rightarrow \quad 4d=0, \quad 2a+2e=0, \quad -4a=1, \quad -2b+2c=0$$

$$\Rightarrow \quad a=-\frac{1}{4},\ b=0,\ c=\text{proizvoljno},\ d=0,\ e=\frac{1}{4},\ f=\text{proizvoljno}$$

$$Y_p = \left(-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)\cos x + \left(\frac{1}{4}x+C_2\right)\sin x$$

$$Y = \left(-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)\cos x + \left(\frac{1}{4}x+C_2\right)\sin x + C_3\cos x + C_4\sin x$$
$$= \left(-\frac{1}{4}x^2+C_5\right)\cos x + \left(\frac{1}{4}x+C_6\right)\sin x \quad \text{opće rješenje}$$

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

Rj.

$y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$ je nehomogena lin. dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima

$y = y_p + y_h$ oblika za opće rješenje

$y'' - 5y' = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{5x}$

$y_h = C_1 + C_2 e^{5x}$

Partikularno rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata.

$3x^2 \cdot x^0$ se nalazi na desnoj strani date diferencijalne jednačine
x^0 se nalazi u y_h koji odgovara korijenu $\lambda = 0$ višestrukosti 1 } $\Rightarrow$

$3x^{2+1} \cdot x^0 = 3x^3$

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \underbrace{ax^3 + bx^2 + cx}_{y_{p_1}} + \underbrace{d\sin 5x + e\cos 5x}_{y_{p_2}}$

$y_{p_1} = ax^3 + bx^2 + cx$

$y_{p_1}' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y_{p_1}'' = 6ax + 2b$

$y_{p_1}'' - 5y_{p_1}' = 3x^2$

$6ax + 2b - 5(3ax^2 + 2bx + c) = 3x^2$

x^2: $-15a = 3$

x: $6a - 10b = 0$

x^0: $2b - 5c = 0$

$\Rightarrow$ $a = -\frac{1}{5}$, $b = -\frac{3}{25}$, $c = -\frac{6}{125}$

$$y_{p_1} = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 - \frac{6}{25}x$$

$y_{p_2} = d\sin 5x + e\cos 5x$

$y_{p_2}' = 5d\cos 5x - 5e\sin 5x$

$y_{p_2}'' = -25d\sin 5x - 25e\cos 5x$

$y_{p_2}'' - 5y_{p_2}' = \sin 5x$

$(-25d + 25e)\sin 5x +$

$+(-25e - 25d)\cos 5x =$

$= \sin 5x$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} -25d + 25e = 1 \\ -25e - 25d = 0 \end{array}\right\} + \quad \Rightarrow \quad -50d = 1$$

$$d = -\frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1}{50}$$

$$y_{p_2} = -\frac{1}{50}\sin 5x + \frac{1}{50}\cos 5x$$

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 - \frac{6}{125}x + \frac{1}{50}(\cos 5x - \sin 5x)$$

opće rješenje

(#) Odrediti oblik partikularnog rješenja diferencijalne jednadžbe.

a) $y'' + 6y' + 10y = 3x e^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$

b) $y'' - 8y' + 20y = 5x e^{4x}\sin 2x$

c) $y'' - 2y' + y = 2x e^{x} + e^{x}\sin 2x$

d) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x$

e) $y^{IV} + 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$

Rj. Date jednačine su homogene linearne dif. jedn. drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

a) $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = -3 \pm i \qquad y_h = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2 \sin x)$

Izrazi xe^{-3x} i $e^{3x}\cos x$ se ne nalaze u y_h

$$\Rightarrow \quad y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = ax e^{-3x} + b e^{-3x} + c e^{3x}\cos x + d e^{3x}\sin x$$

$$= (ax + b)e^{-3x} + (c\cos x + d\sin x)e^{3x}$$

b) $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$

$\lambda_{1,2} = 4 \pm 2i \qquad y_h = e^{4x}(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x)$

$u = e^{4x}\sin 2x$ se nalazi u y_h (koji odgovara korijenu višestrukosti 1)

$x \cdot u = x e^{4x}\sin 2x$ se nalazi na desnoj strani dif. jedn. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ oblik partikularnog rješenja će biti $x^{1+1}u$ plus njegovi diferen.

$$y_p = ax^2 e^{4x}\sin 2x + bx e^{4x}\sin 2x + c e^{4x}\sin 2x +$$
$$+ dx^2 e^{4x}\cos 2x + f x e^{4x}\cos 2x + g e^{4x}\cos 2x =$$

$$Y_p = \left[(ax^2+bx+c)\sin 2x + (dx^2+fx+g)\cos 2x\right] e^{4x}$$

c) $\lambda^2+2\lambda+1=0$

$(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow Y_h=(C_1+C_2x)e^x$

$e^x\sin 2x$ se ne nalazi (ne pripada) Y_h,

$u=xe^x$ se nalazi u Y_h (višestrukosti 1)

$x^0\cdot u = xe^x$ se nalazi na desnoj strani dif. jedn. $\Rightarrow$

$x^{1+0}u = x^2e^x$ plus njegovi izvodi $Y_p = Y_{p_1}+Y_{p_2}$

(oblik part. rješ. dif. jedn.)

$$Y_p = (ax^2+bx+c)e^x + (d\cos 2x + f\sin 2x)e^x$$

d) $\lambda^2-4\lambda+5=0$

$\lambda_{1,2}=2\pm i \Rightarrow Y_h = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$,

$$e^{2x}\sin^2 x = e^{2x}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{2x}\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x$$

$$Y''-4Y'+5Y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x$$

Izrazi e^{2x} i $e^{2x}\cos 2x$ ne pripadaju Y_h (se ne nalaze u)

pa

$$Y_p = ae^{2x} + be^{2x}\cos 2x + ce^{2x}\sin 2x$$

$u=\sin x$ se nalazi u Y_h

$\sin 3x$ ne pripada Y_h

$Y_p = a\sin 3x + b\cos 2x + cx\sin x + dx\cos x + e\sin x + f\cos x$

e) $\lambda^4+5\lambda^2+4=0$

$\lambda^2=t \quad t^2+5t+4=0$

$(t+1)(t+4)=0$

$\lambda^2=-4 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 2i$

$\lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda_{3,4}=\pm i$

$Y_h = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3\cos x + C_4\sin x$

$$\sin x\cdot\cos 2x - \frac{1}{2}\left(\sin(x+2x)+\sin(x-2x)\right) = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x$$

Zadaci za vježbu

1. Riješiti diferencijalne jednačine

(a) $y'' + 2y = e^x + 2$

(b) $y'' - y = e^x \sin 2x$

(c) $y'' + 2y' + 2y = x^2 + \sin x$

(d) $y'' - 9y = x + e^{2x} - \sin 2x$

(e) $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 4x + 8$

(koristiti $Ax^3 + Bx^2 + Cx$).

(f) $y'' + y = -2\sin x + 4x\cos x$

(g) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 4x - 1 + 2x^2 e^{2x} + 5xe^{2x} + e^{2x}$

Rješenja:

a) $y = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{3}e^x + 1$

b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - e^x(\sin 2x + \cos 2x) \cdot \frac{1}{8}$

c) $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{5}(\sin x - 2\cos x)$

d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{9}x - \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{1}{13}\sin 2x$

e) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x$

f) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x\cos x + x^2 \sin x$

g) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$